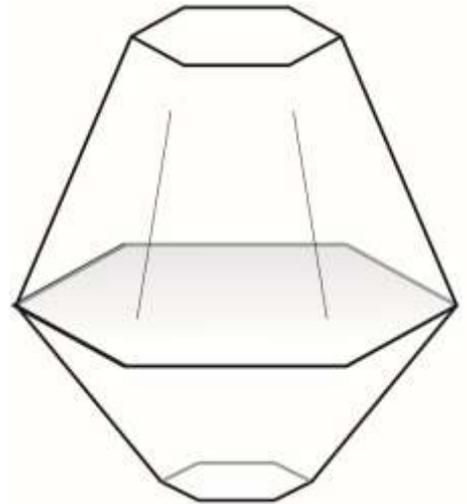


Prova OIM 2023

Nível 3 – 2ª Fase

Questão 1

Cristiana comprou um copo novo para fazer drinks, chamado “Copo Diamante”. O copo recebe esse nome por ser formado por dois troncos de pirâmide regular de base hexagonal, que se unem pela base maior, conforme a imagem. O tronco menor possui as seguintes dimensões: aresta da base menor = 2cm, aresta da base maior = 5cm e altura = 2cm. O tronco maior possui as seguintes dimensões: aresta da base menor = 3cm, aresta da base maior = 5cm e altura = 4cm. Para decorar o drink, Cristiana colocou duas esferas de gelo de raios iguais a 2cm dentro do copo. Supondo que as esferas de gelo ficarão completamente submersas no drink, qual é a quantidade de bebida que Cristiana deve preparar para preencher completamente o copo?



Questão 2

BRICS é o nome dado a um grupo formado por cinco países: Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul que tem por objetivo a cooperação econômica e o desenvolvimento em conjunto. Suponha que os três principais países (China, Rússia e Brasil) se reuniram para decidir sobre o número de países que compõem o grupo. São apenas três decisões possíveis: ampliar o número de países membros para 11, reduzir o número de países membros para apenas 3, ou manter o número de países membros em 5. Suponha que os países votarão em dois turnos:

- No 1º turno, China, Rússia e Brasil votarão entre ampliar ou reduzir;
- No 2º turno, China, Rússia e Brasil votarão entre a escolha vencedora do 1º turno e manter.

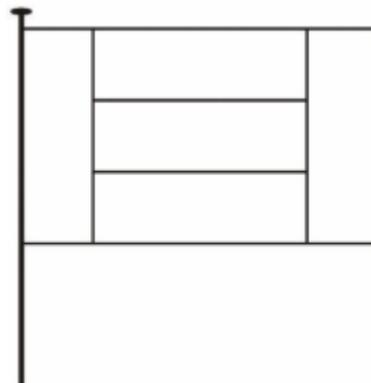
O quadro a seguir apresenta as preferências dos três países:

China	ampliar > manter > reduzir
Rússia	manter > ampliar > reduzir
Brasil	reduzir > ampliar > manter

- Se supormos que os países não conheçam as preferências uns dos outros, qual seria o resultado da votação?
- Suponha que a Rússia conheça as preferências de China e Brasil. Com esta informação, qual seria o resultado da votação?
- E se as preferências forem públicas, qual seria o resultado da votação?

Questão 3

Em uma gincana, uma das equipes pretende confeccionar para a torcida uma bandeira no formato da imagem. A bandeira deve ser pintada de forma que regiões adjacentes possuam cores diferentes. Se a equipe possui latas de tinta de 8 cores distintas para pintar a bandeira, de quantas maneiras a bandeira pode ser pintada?

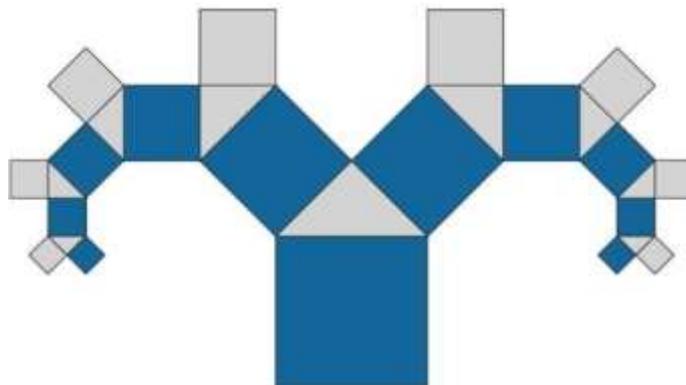


Questão 4

Considere um triângulo ABC cujos vértices pertencem à curva $y = \log x$, em que as abscissas desses pontos formam uma progressão aritmética de razão r e termo médio igual a 5. Quais valores r pode assumir para garantir a existência desse triângulo?

Questão 5

A Árvore de Pitágoras é um fractal formado por quadrados, de forma que quando três deles se tocam é formado um ângulo reto. A figura a seguir representa uma parte deste fractal, em que o maior quadrado possui lado l .



a) Considere que o quadrado maior corresponde à etapa i_0 , o quadrado de tamanho imediatamente menor corresponde à etapa i_1 , e assim sucessivamente. Qual é a expressão que fornece a área do quadrado obtido na etapa i_n ?

b) Se prosseguirmos com o processo de construção a partir da mesma lógica de formação, qual será a área total da figura obtida?



Nível 3

QUESTÃO 1

Todas as resoluções devem ser justificadas

Nome completo:



Nível 3

QUESTÃO 2

Todas as resoluções devem ser justificadas

Nome completo:



Nível 3

QUESTÃO 3

Todas as resoluções devem ser justificadas

Nome completo:



Nível 3

QUESTÃO 4

Todas as resoluções devem ser justificadas

Nome completo:



Nível 3

QUESTÃO 5

Todas as resoluções devem ser justificadas

Nome completo: