Olimpíada Itabirana de Matemática

OIM 2021

Nível 3

2° Fase

NOME COMPLETO DO (A) ALUNO(A) - COMPLETE COM LETRA DE FORMA

DATA DE NASCIMENTO

dia mês ano

DDD

TELEFONE

SEXO

MASCULINO FEMININO

ASSINATURA DO ALUNO

INSTRUÇÕES:

1. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadradinho e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
2. Assine o quadro acima e a lista de presença.
3. A prova pode ser feita a lápis ou à caneta.
4. A prova tem duração de 3 horas. Só será permitida a saída da sala 45 minutos após o início da prova.
5. A solução das questões deve ser escrita no local destinado a ela, de forma legível e organizada. Registros na folha de rascunhos não serão considerados na correção.
6. Registre todo o desenvolvimento das questões, pois na correção serão considerados todo o raciocínio apresentado.
7. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
8. Não é permitido o uso de instrumentos de desenho, calculadoras, aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, etc.) ou qualquer fonte de consulta.

USO EXCLUSIVO DA EQUIPE ORGANIZADORA:

Pontos:

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ 5:_____

Total: _______

Apoio:

impa

Olimpíada Brasileira de Matemática

CNPq

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MINAS GERAIS UEMG

UNIDADE JOÃO MONLEVADE

Questão 1

Joseph Louis Lagrange foi um matemático italiano que viveu entre 1776 e 1813. Suas principais obras se concentraram no estudo da mecânica analítica e com isso houve um grande avanço dentro das mais diversas áreas da engenharia e da física. Um dos diversos métodos matemáticos desenvolvidos por ele, consiste na chamada **interpolação de Lagrange**. Esse método fornece uma forma de calcular um polinômio que passa por determinados pontos no plano cartesiano. Para isso, são determinadas funções de interpolação $L_i(x)$, que também são polinômios. Nessa técnica, é necessário calcular uma função de interpolação distinta para cada um dos pontos previamente definidos, através do produtório a seguir:

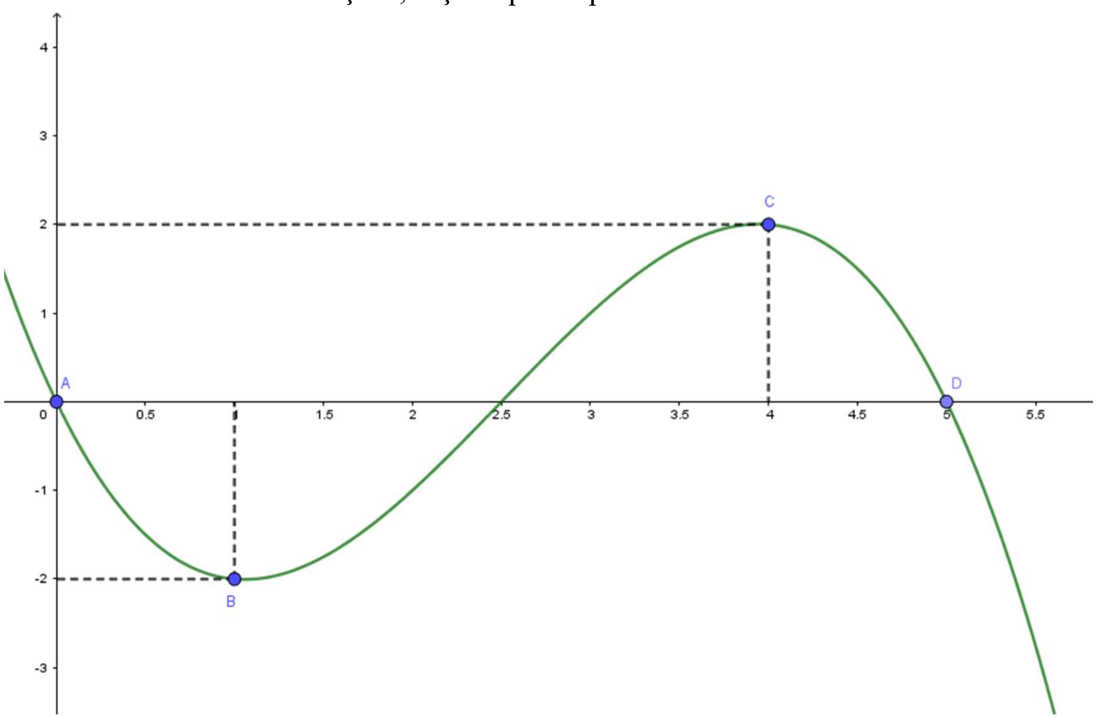
$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

O produtório consiste em multiplicar a sequência de elementos formados pela variação de j = 1 até n + 1, em que **n** corresponde ao grau do polinômio que se deseja obter, e j e i estão associados à posição dos pontos existentes.

Encontradas as funções de interpolação, o polinômio final é obtido por meio do somatório a seguir:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \cdot L_i(x)$$

Considerando essas informações, faça o que se pede:



a) O que é possível afirmar sobre o grau do polinômio representado no gráfico? Explique.
b) Quais são a coordenadas dos pontos A, B, C e D?
c) Encontre as funções de interpolação de Lagrange associados a esses quatro pontos através do produtório descrito no enunciado, considerando que o polinômio representado possui somente raízes reais.
d) Determine o polinômio que descreve o gráfico acima através do somatório descrito no enunciado.

Questão 2

Georg Alexander Pick nasceu em Viena em 1859 e morreu no campo de concentração de Theresienstadt em 1942. Escreveu 67 artigos nas mais diversas áreas da Matemática. Sua obra mais famosa apresenta o "Teorema de Pick". Com esse teorema é possível calcular a área de um polígono cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras no plano cartesiano. A equação que fornece a área através desse teorema é:

$$A = \frac{F}{2} + I - 1$$

Onde F é o número de pontos com coordenadas inteiras situados sobre o contorno do polígono e I é o número de pontos também de coordenadas inteiras situados no interior do polígono, que serão chamados aqui respectivamente de pontos da fronteira (F) e pontos do interior (I).
Um quadrilátero é formato pela intercessão das retas $8x - 5y = -29$; $y = -0,5x + 10$; $y = 1$ e $x = 16$. Ciente disso, faça o que se pede:

a) Faça um esboço das retas e destaque o quadrilátero formado.
b) Quais são as coordenadas dos vértices desse quadrilátero?
c) Quantos pontos com coordenadas inteiras existem no interior desse polígono? Quantos são os pontos de fronteira? Cite 3 exemplos de cada.
d) Utilize do Teorema de Pick para calcular a área total da figura.
e) De que outra forma você calcularia a área dessa figura? Escreva um pequeno texto que explique seu raciocínio.

Questão 3

A cidade de Itabira conta com diversos pontos turísticos em espaço aberto. Entre eles, o monumento "Eu amo Itabira" tem feito sucesso entre itabiranos e visitantes. Uma professora de matemática resolveu passar o seguinte desafio aos seus alunos:

"Vou dar a vocês cinco latas de tinta: amarelo, azul, laranja, vermelho e verde. Vocês devem pintar o letreiro de forma que as peças que estão lado a lado não podem ter a mesma cor. O coração vermelho separa as duas palavras e sua cor não poderá ser mudada"

a) Dê um exemplo de como o letreiro poderia ser pintado.

b) Determine de quantas formas diferentes seria possível pintar o letreiro. Explique seu raciocínio.

c) Caso o coração pudesse ter a cor alterada, qual seria o aumento no número de maneiras de se pintar as peças do monumento?

Questão 4

Sejam X $= \dfrac{1}{a \cdot \log_a c}$ e Y = $\dfrac{1}{2a \cdot \log_b c}$. Calcule X + Y, sendo:

a) c = $a^2 \cdot b^4$

b) c = 2025

Questão 5

No jogo convencional de dominó existem 28 peças que são numeradas de zero ao seis (0-0; 0-1; 0-2; 0-3; 0-4;0-5; 0-6; 1-2, 1-3 e assim sucessivamente). Carol e Mariane escolhem aleatoriamente, cada uma, uma dessas 28 peças, de modo que primeiramente Carol retira uma peça e depois Mariane retira outra. Qual é a probabilidade delas possuírem um número comum em mãos? Exemplo: Carol com (1-0) e Mariane com (5-0) ou Carol com (3-2) e Mariane com (2-1).