

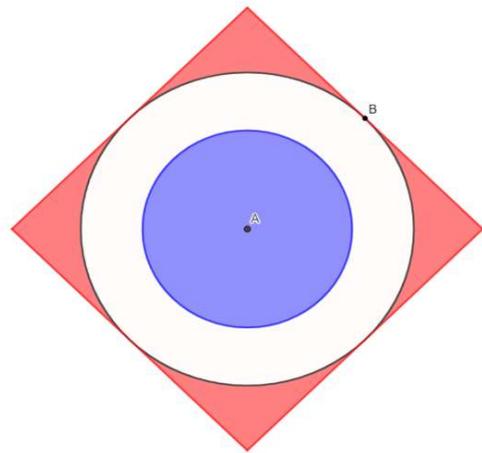


Prova OIM 2024
Nível 3 – 1ª Fase

Questão 1

Em uma competição de tiro ao alvo, em cada disparo o competidor pode obter as seguintes pontuações:

- 1 ponto, caso acerte a região mais externa, em vermelho;
- 1,5 pontos, caso acerte a região em branco, representada pela coroa circular;
- 2 pontos, caso acerte a região do círculo central, em azul.



O alvo é composto por três figuras sobrepostas, um quadrado e dois círculos concêntricos, conforme a figura. A e B são, nessa ordem, centro dos círculos e ponto de tangência. Se $AB = 3\sqrt{2}$ cm, qual a probabilidade de um competidor fazer 1 ponto ao dar um único tiro?

- a) $\frac{4 - \pi}{4}$ b) $\frac{6 - \pi}{8}$ c) $\frac{4 - \pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{10}$ e) $\frac{6 - \pi}{4}$

Questão 2

A sequência de Fibonacci é uma sucessão infinita de números que obedecem a um padrão. Os dois primeiros termos são unitários e, a partir do terceiro, cada termo é obtido pela soma dos dois anteriores. Sabendo disso, qual é a soma dos restos da divisão por 4 dos 24 termos anteriores ao 2024º termo pertencente a essa sequência?

- a) 32 b) 33 c) 30 d) 24 e) 34

Questão 3

Considerando que m não é um número inteiro e que $\sin(x) = \frac{m-4}{4m}$ e $\cos(x) = \frac{m+4}{2m}$, o valor de $\operatorname{tg}(x)$ é:

- a) $-\frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $-\frac{3}{4}$ e) $-\frac{1}{2}$

Questão 4

As redes sociais estão presentes em nosso cotidiano e são utilizadas para diferentes fins, como compartilhar fotos, vídeos e notícias. Quatro estudantes utilizam aparelhos eletrônicos distintos para acessar apenas a sua rede social preferida, por um determinado tempo diário. Sabe-se que:

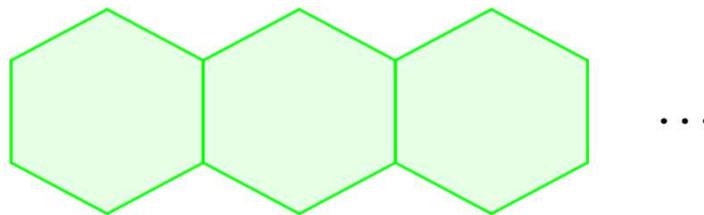
- Maria Clara utiliza sua rede social preferida durante um sexto do dia, e quem utiliza o Twitter navega duas horas e meia por dia.
- Quem faz uso do smartphone para acessar sua rede social não utiliza o WhatsApp.
- Quem navega na internet pelo notebook é o que navega por mais tempo.
- Julia prefere o Instagram. Thúlio utiliza seu tablet para navegar na internet metade do tempo de quem mais navega.
- Leonardo passa duas horas e meia por dia em sua rede social preferida.
- Quem navega por mais tempo é mulher e não é Julia.
- Thúlio acessa o Facebook ou o Twitter.
- Quem faz uso do computador é um homem, e quem prefere o Instagram utiliza-o três horas por dia.

É possível concluir que todas as afirmativas a seguir são verdadeiras, EXCETO:

- A rede social preferida de Júlia é o Instagram.
- Thúlio utiliza o smartphone.
- Maria Clara tem acesso a uma rede social durante 4 horas por dia.
- Leonardo acessa o Twitter.
- Diariamente, Júlia conecta-se a uma rede social por 3 horas.

Questão 5

Tauan, aluno do Ensino Fundamental da Escola OIM, brinca de desenhar hexágonos regulares, conforme a figura a seguir:



Se a_n o número de segmentos que são utilizados para desenhar n hexágonos, é correto afirmar que:

- $a_{2024} = a_{2026} - 10$
- Todos os valores a_n são pares
- $a_{2024} = 13101$
- $a_{2024} = a_{2025} - 7$
- $a_n = 7n - 1, n \geq 1$

Questão 6

Dois números foram escolhidos entre cinco números naturais quaisquer. Qual é a probabilidade de o produto desses números ser ímpar?

- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{2}{5}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{3}{5}$

Questão 7

Em um trabalho de pesquisa em laboratório, estudantes de Engenharia Civil precisavam testar um número x de corpos de prova de concreto. O teste realizado foi o de compressão, que consiste em utilizar um equipamento apropriado para medir a tensão máxima que esses corpos de prova suportam antes de se romperem. Esse parâmetro é expresso em MPa (Mega Pascal). O objetivo do teste era verificar se a resistência dos corpos de prova variava dentro do intervalo esperado, de 20 a 50 MPa. Após realizar os testes, os estudantes calcularam a média aritmética da resistência de todos os corpos de prova, que foi de 35 MPa. No entanto, conforme a norma técnica aplicada, os corpos de prova que atingiam a resistência máxima esperada deveriam ser descartados. Após descartar esses corpos de prova, a nova média das resistências caiu para 34 MPa. Sabendo que apenas cinco corpos de prova atingiram a resistência máxima, determine o número total de corpos de prova testados.

- a) 30 b) 80 c) 70 d) 75 e) 40

Questão 8

A figura a seguir é formada por sete círculos que se intersectam em um mesmo ponto. Considere que o raio do menor círculo mede r . Determine a área da região preta, sabendo que o raio de cada círculo imediatamente maior aumenta uma unidade.



- a) $A = \pi(r^2 + 6r + 21)$ u. a.
b) $A = \pi(r^2 + 4r + 11)$ u. a.
c) $A = \pi(r^2 + 6r + 7)$ u. a.
d) $A = \pi(r^2 + 4r + 7)$ u. a.
e) $A = \pi(r^2 + 4r + 21)$ u. a.

Questão 9

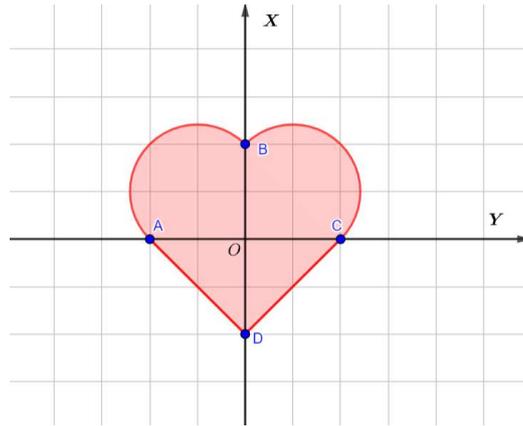
Considere a equação $3ax - 81p^5 = 0$, em que x é uma incógnita e p é um número primo diferente de 3. Quantos são os valores inteiros de a tais que a equação admite solução inteira?

- a) 24
b) 48
c) 15
d) 30
e) 42

Questão 10

Carlos, um aluno do Ensino Médio da Escola OIM, pretende construir um “Coração Perfeito”. Para tanto, ele faz os seguintes passos:

1. Marcam-se no plano cartesiano XY os pontos A , B e C , de modo que $\underline{AO} \equiv \underline{BO} \equiv \underline{CO}$, sendo O a origem do plano;
2. Traçam-se dois semicírculos com diâmetros em \underline{AB} e \underline{BC} ;
3. Por fim, constroem-se os segmentos congruentes \underline{AD} e \underline{CD} , de modo que $\underline{AD} = \underline{AO}\sqrt{2}$.



Se a área do “Coração Perfeito” for $6(\pi/4 + 1)$, então a coordenada do ponto A é dada por:

- a) $(-\sqrt{3}, 0)$
- b) $(\sqrt{7}/2, 0)$
- c) $(-\sqrt{5}, 0)$
- d) $(-3\sqrt{3}, 0)$
- e) $(-2, 0)$

Questão 11

Uma caixa aberta em formato de paralelepípedo, sem tampa, será construída. O metro quadrado do material utilizado nas faces laterais custa metade do valor do metro quadrado do material usado na base, que possui comprimento a e largura b . A caixa deve ter uma altura de 1,5 m e volume de 4 m^3 . Qual é a equação que descreve a razão R entre o custo total e o custo do metro quadrado da base dessa caixa, em função do comprimento a ?

- a) $R = 3a + \frac{8}{a} + \frac{16}{3}$
- b) $R = 6a + \frac{16}{a} + \frac{32}{3}$
- c) $R = \frac{3}{2}a + \frac{4}{a} + \frac{8}{3}$
- d) $R = 3a + \frac{8}{a} + \frac{8}{3}$
- e) $R = 6a + \frac{8}{a} + \frac{16}{3}$

Questão 12

Você sabia que é possível medir a temperatura ambiente a partir da quantidade de vezes que um grilo faz “cri-cri” a cada intervalo de tempo? Isso somente é possível para temperaturas acima de 12°C , pois temperaturas menores não despertam nos bichinhos a vontade de acasalar. Sabendo disso, durante uma aula de Física, a professora Rayandra propôs aos estudantes o desafio de determinar qual é a função que relaciona o número de “cri-cri” de grilo em relação à temperatura, em graus Celsius. Os estudantes chegaram à seguinte relação:

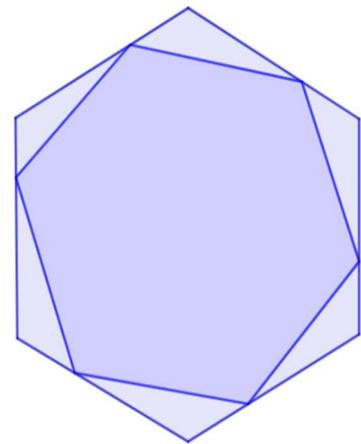
“cri-cri”	Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
inaudível	abaixo de 12°C
37	25°C
28	20°C
19	15°C

Qual das alternativas corresponde à função que modela a situação proposta pela professora Rayandra?

- a) $f(x) = \frac{5x+40}{9}, D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 14\}$
- b) $f(x) = \frac{5x+40}{9}, D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 12\}$
- c) $f(x) = x + 40, D_f = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 12\}$
- d) $f(x) = x + 40, D_f = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 54\}$
- e) $f(x) = \frac{5x-32}{9}, D_f = \{x \in \mathbb{N} / x \geq 12\}$

Questão 13

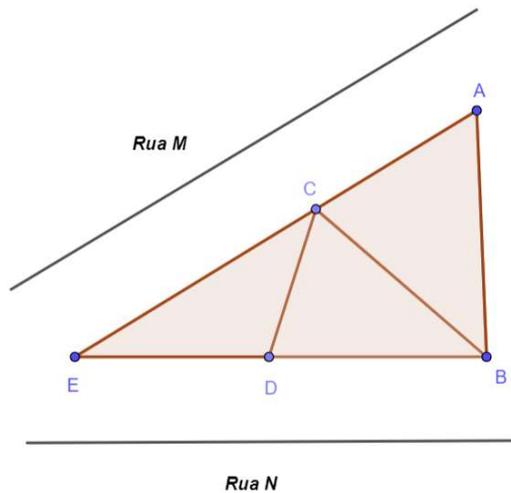
A medalha da OIM é formada por três hexágonos regulares, em que dois deles são congruentes. Ao analisar dois desses hexágonos, sabe-se que o vértice do hexágono menor intersecta o lado do hexágono maior, dividindo-o na proporção 2 para 1. Supondo que a medida do lado do hexágono maior seja 5cm, determine a medida do lado do hexágono menor, em centímetros.



- a) $\frac{5\sqrt{7}}{3}$
- b) $\frac{7\sqrt{5}}{3}$
- c) $\frac{5\sqrt{7}}{9}$
- d) $\frac{17\sqrt{5}}{9}$
- e) $\frac{25}{9}$

Questão 14

Maria dividiu seu terreno em 3 lotes triangulares ABC, BCD e CDE, que foram dados a seus filhos Newton, Pitágoras e Tales, respectivamente. A figura mostra a divisão dos terrenos.



Sabe-se que $\underline{AE} = 45\text{m}$, $\underline{ED} \equiv \underline{DB}$ e as áreas dos terrenos de Newton e Pitágoras são 160m^2 e 120m^2 , nessa ordem. Qual é o comprimento do lado do terreno de Tales que está de frente para a Rua M?

- a) 18 m
- b) 27 m
- c) 26 m
- d) 25 m
- e) 28 m

Questão 15

A imagem representa um produto em que P e Q são algarismos do sistema decimal. Quantos são os pares ordenados (P, Q) tais que o resultado desse produto é um número múltiplo de 15?

$$\begin{array}{r} \times \quad 11P \\ \quad 1Q \\ \hline \end{array}$$

- a) 12
- b) 9
- c) 6
- d) 17
- e) 16