

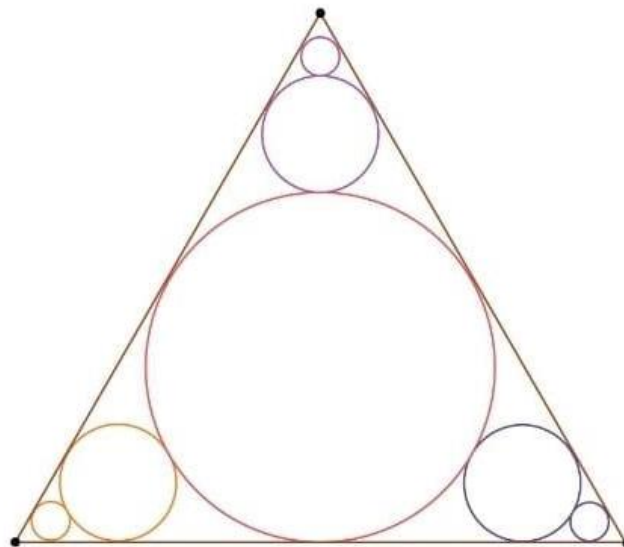


Prova da 1ª Fase

Nível 3

Questão 1

Em um triângulo equilátero de lado unitário há 7 círculos em seu interior, como mostra a figura. O círculo central é tangente aos três lados do triângulo. Três círculos congruentes são tangentes ao círculo central, a um círculo menor e a dois lados do triângulo. Outros três círculos menores são tangentes a um círculo e a dois lados do triângulo.



A razão entre a soma das áreas de todos os círculos e a área do triângulo equilátero é:

- a) $\frac{37\pi}{324}$
- b) $\frac{37\sqrt{3}\pi}{324}$
- c) $\frac{37\sqrt{3}\pi}{243}$
- d) $\frac{37\sqrt{3}\pi}{81}$
- e) $\frac{37\pi}{243}$

Questão 2

As Ilhas Diomedes são duas pequenas ilhas localizadas no Estreito de Bering, entre o Alasca (EUA) e a Sibéria (Rússia), separadas por apenas 4 km de mar, mas com 21 horas de diferença no fuso horário.

A Pequena Diomedes pertence aos EUA e a Grande Diomedes pertence à Rússia. A primeira segue o fuso GMT-9 e, a segunda, GMT+12. Por isso, elas são conhecidas como Ilha de Ontem e Ilha de Amanhã, respectivamente.

As ilhas já foram cenário de feitos históricos, como a travessia a nado feita em 7 de agosto 1987 pela nadadora Lynne Cox, que tentou simbolicamente unir EUA e URSS em plena Guerra Fria.

Supondo que a nadadora Lynne Cox saiu à nado da Grande Diomedes ao meio dia e que levou 2 horas para percorrer o percurso, em que dia e horário ela chegou em Pequena Diomedes?

- a) Dia 06 de Agosto de 1987 às 17h.
- b) Dia 06 de Agosto de 1987 às 15h.
- c) Dia 07 de Agosto de 1987 às 14h.
- d) Dia 07 de Agosto de 1987 às 15h.
- e) Dia 07 de Agosto de 1987 às 17h.

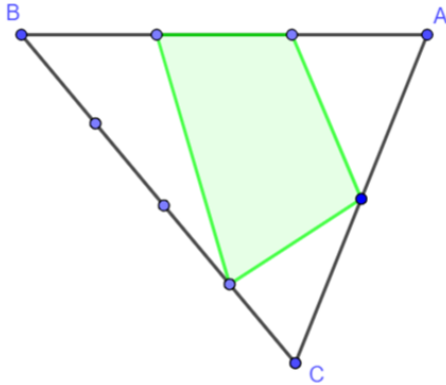
Questão 3

Em uma sala há certa quantidade de pessoas e cada indivíduo porta consigo uma quantia em dinheiro, sendo os valores números ímpares consecutivos positivos. Se a soma das quantias é 91 reais, quantas pessoas podem haver na sala?

- a) Apenas 1 pessoa
- b) Apenas 13 pessoas
- c) 1 ou 13 pessoas
- d) 1 ou 7 pessoas
- e) Apenas 91 pessoas

Questão 4

Na figura, os pontos destacados dividem cada lado do triângulo ABC em segmentos congruentes. Sabendo que a área do triângulo ABC é igual a 120 cm^2 , é possível afirmar que a área do quadrilátero em destaque, em centímetros quadrados, é:



- a) 65
- b) 60
- c) 70
- d) 55
- e) 50

Questão 5

Três amigos, Ana, Bruno e Carla, colocaram suco em suas garrafinhas, utilizando ao todo 3,5 litros de suco. Após isso, observaram o seguinte:

- A quantidade total de suco nas garrafinhas de Ana e Bruno juntas é x litros.
- A quantidade total de suco nas garrafinhas de Ana e Carla juntas é y litros.
- A quantidade total de suco nas garrafinhas de Bruno e Carla juntas é z litros.

Sabendo que nenhuma garrafinha ficou vazia e que, juntos, usaram exatamente 3,5 litros de suco, qual é o valor máximo de $x \cdot y \cdot z$?

- a) $343/27$
- b) $317/15$
- c) 12
- d) $215/8$
- e) 13,5

Questão 6

Quantos números inteiros n satisfazem a condição de que a expressão

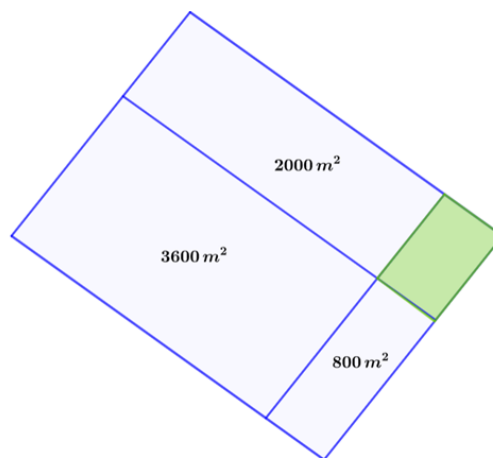
$$\frac{n^2 + 2025}{n + 2025}$$

também é um número inteiro?

- a) 60
- b) 120
- c) 16
- d) 100
- e) 80

Questão 7

Pitágoras dividiu o terreno de sua chácara, que tem formato retangular, em 4 lotes menores, também retangulares, destinados aos seus filhos: Newton, Hipátia, Gauss e Sophie, conforme indicado na figura.



Na figura estão indicadas as áreas dos terrenos de três desses filhos, mas não foi informada a área do terreno destinado a Gauss. Com base nessa informação, qual é a área do terreno destinado a Gauss, em metros quadrados?

- a) $4000/9$
- b) 400
- c) 450
- d) $3600/9$
- e) $845/2$

Questão 8

Cristian, Diana, Michele, Leon e Thiago fizeram uma aposta que consistia em praticar mais atividade física mensalmente. Eles usaram o aplicativo GymRats para fazer check-in diariamente de seus exercícios, venceria quem fizesse maior número check-ins.. Ao final do primeiro mês, constatou-se os seguintes resultados: Diana ficou à frente de Thiago e atrás de Leon; Cristian ficou à frente de Thiago; Michele teve mais check-ins que Diana, mas sua quantidade foi a mediana entre as quantidades de check-ins.

O que se pode afirmar sobre a classificação de Cristian?

- a) Cristian ficou em 1º lugar.
- b) Cristian ficou em 2º lugar.
- c) Cristian ficou em 3º lugar.
- d) Cristian ficou em 1º ou 2º lugar.
- e) Cristian ficou em 2º ou 3º lugar.

Questão 9

Oimlândio pretende criar uma senha para o seu computador utilizando apenas os caracteres disponíveis no sistema abaixo.

@ # & % \$ * +

Ele deseja que a senha tenha entre 3 e 9 caracteres (inclusive), podendo repetir os caracteres em qualquer posição. De quantas maneiras diferentes Oimlândio pode criar essa senha?

- a) $\frac{7^{12}-1}{6}$
- b) $\frac{7^{10}-7^3}{6}$
- c) $\frac{7^{10}-1}{6}$
- d) $\frac{7^{12}+7^3}{6}$
- e) $\frac{7^{10}-7^2}{6}$

Questão 10

Dino gosta de cronometrar todas as suas atividades matinais, com o objetivo de dormir 8 horas por noite, acordar o mais tarde possível e ainda pegar o ônibus para ir à escola. Sabendo que o tempo que ele gasta entre uma atividade e outra é uma progressão aritmética com $a_1 = 5$ segundos e razão $r = 2$ segundos, e que o ônibus passa pontualmente às 6:25, qual é o horário máximo que Dino irá dormir, de forma a executar completamente a sua rotina da manhã e chegar a tempo de pegar o ônibus?

- a) 21:50
- b) 21:54
- c) 21:51
- d) 21:53
- e) 21:52

Rotina da Manhã

☐	<i>Tomar banho</i>	<i>- 8min</i>
☐	<i>Vestir o uniforme completo</i>	<i>-3min</i>
☐	<i>Tomar o café da manhã</i>	<i>-9min</i>
☐	<i>Escovar os dentes</i>	<i>-2min</i>
☐	<i>Arrumar a mochila</i>	<i>-2min</i>
☐	<i>Sair do apartamento e chegar à portaria do prédio</i>	<i>-2min</i>
☐	<i>Chegar ao ponto de ônibus</i>	<i>-6min</i>

Questão 11

Seja $N = (321)_b$, onde b é uma base inteira maior que 3. Sabendo que N é divisível por 7, determine a soma de todos os valores possíveis de b , considerando apenas bases naturais onde a representação $(321)_b$ é válida.

- a) 21
- b) 24
- c) 27
- d) 30
- e) 33

Questão 12

Um robô explorador move-se sobre um plano quadriculado cartesiano partindo da origem $(0, 0)$. Ele pode executar apenas dois tipos de movimentos:

- **Passo curto (S):** avança 2 unidades para a direita e sobe 1 unidade:
 $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 1)$, consumindo 3 unidades de energia.
- **Passo longo (L):** avança 1 unidade para a direita e sobe 2 unidades:
 $(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 2)$, consumindo 4 unidades de energia.

O robô precisa chegar exatamente ao ponto $(2025, 1020)$ antes de sua bateria descarregar. Qual é o consumo mínimo de energia que o robô vai precisar e quantos dos movimentos realizados foram passos curtos (S), respectivamente?

- a) 3050 unidades de energia com 1010 passos curtos.
- b) 3048 unidades de energia com 1005 passos curtos.
- c) 3060 unidades de energia com 1000 passos curtos.
- d) 3054 unidades de energia com 1008 passos curtos.
- e) 3030 unidades de energia com 1015 passos curtos.

Questão 13

Determine quantos polígonos regulares distintos podem ser formados de modo que a medida de seus ângulos internos, dada em graus, seja um número inteiro.

- a) 16
- b) 18
- c) 20
- d) 22
- e) 24

Questão 14

Em um campeonato de vôlei, participam n equipes que disputam entre si uma fase classificatória no formato todos contra todos em turno e retorno, ou seja, cada time enfrenta os demais duas vezes. Ao final dessa fase, as oito equipes mais bem colocadas avançam para os *playoffs*, que são compostos por três etapas: quartas de final, semifinais e final. Nas quartas de final, cada time enfrenta um único adversário e a classificação acontece no formato “melhor de três”, sendo necessário vencer duas partidas para avançar para a semifinal, que acontece no mesmo formato, e a final é disputada em jogo único. Considerando essa estrutura, determine qual é o número mínimo e máximo de partidas, em função de n , que podem ser disputadas ao longo de toda a competição.

- a) Mínimo: $n(n-1) + 13$; máximo: $n(n-1) + 19$
- b) Mínimo: $n(n-1) + 13$; máximo: $n(n-1) + 21$
- c) Mínimo: $[n(n-1)]/2 + 13$; máximo: $[n(n-1)]/2 + 19$
- d) Mínimo: $2n(n-1) + 12$; máximo: $2n(n-1) + 19$
- e) Mínimo: $n(n-1) + 21$; máximo: $n(n-1) + 33$

Questão 15

Dois irmãos curiosos decidiram brincar com os números de 1 até 2025. Um deles, Rafael, listou todos esses números em ordem crescente, buscando padrões interessantes. No entanto, seu irmão mais caótico, Henrique, decidiu apagar todos os números que possuem o dígito 4 ou 5 repetido pelo menos uma vez. Por exemplo, Henrique não apagou os números 1453 e 1548, mas apagou 1955 (porque o 5 aparece duas vezes) e 844 (porque o 4 aparece duas vezes). Quantos números restaram na lista de Rafael depois da travessura de Henrique?

- a) 1885
- b) 1900
- c) 1926
- d) 1940
- e) 1913