



## 5ª Olimpíada Itabirana de Matemática - OIM 2022

### Nível 2 - 2ª Fase

#### QUESTÃO 1

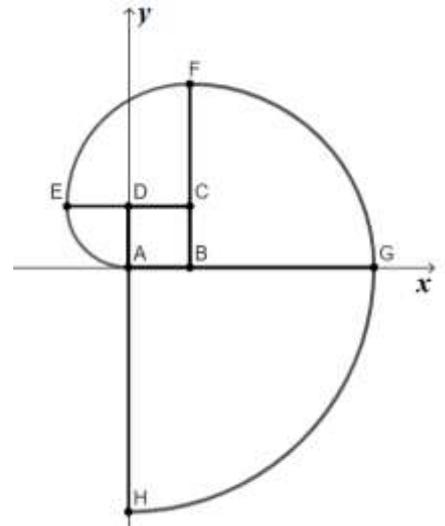
Participam da Copa do Mundo 32 times de futebol, formados pelos melhores jogadores de cada um dos países que essas seleções representam. Inicialmente, as 32 seleções são divididas, por meio de sorteio, em oito grupos com quatro times cada. Na fase de grupos, todos os times de cada grupo jogam entre si uma única vez. Para a fase final, chamada eliminatória, são selecionados os dois melhores colocados de cada grupo, que disputam as “oitavas de final”. As oito seleções vencedoras se enfrentam nas “quartas de final”, em que os ganhadores disputam a semifinal, que define as duas seleções que irão jogar a partida final e disputar o título mundial.

- Determine o número total de partidas que serão realizadas na fase de grupos.
- Após finalizada a fase de grupos, considerando os times que irão para a fase final, de quantas maneiras diferentes é possível ser formada a partida de disputa do título?

#### QUESTÃO 2

Considere um quadrado  $ABCD$  de lado 1 cm. Sobre o lado  $\overline{AD}$ , traça-se um quadrante de círculo com centro no ponto  $D$ . Na sequência, desenha-se um quadrante de círculo centrado em  $C$ , depois um centrado em  $B$  e, por fim, um centrado em  $A$ , formando uma espiral, conforme a figura.

- Determine as coordenadas cartesianas de todos os pontos exibidos na figura.
- Uma formiga parte do ponto  $A$  e se desloca ao longo da espiral até o ponto  $H$ , e depois retorna ao ponto inicial em linha reta. Qual a distância total percorrida pela formiga?



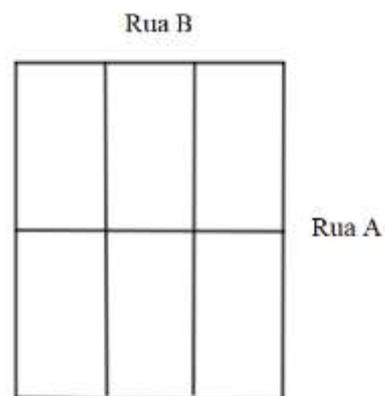
#### QUESTÃO 3

Seja  $A$  um número natural de três algarismos e  $B$  o número formado invertendo-se a ordem dos algarismos de  $A$ , com  $A > B$ .

- Mostre que  $A - B$  é múltiplo de 9 e de 11.
- Qual é o maior e o menor valor possível para a diferença  $A - B$ ?
- Suponha que  $A = 7XY$ , sendo  $X$  o algarismo das dezenas e  $Y$  o algarismo das unidades. Se  $A - B = 396$ , determine o valor de  $Y$ .

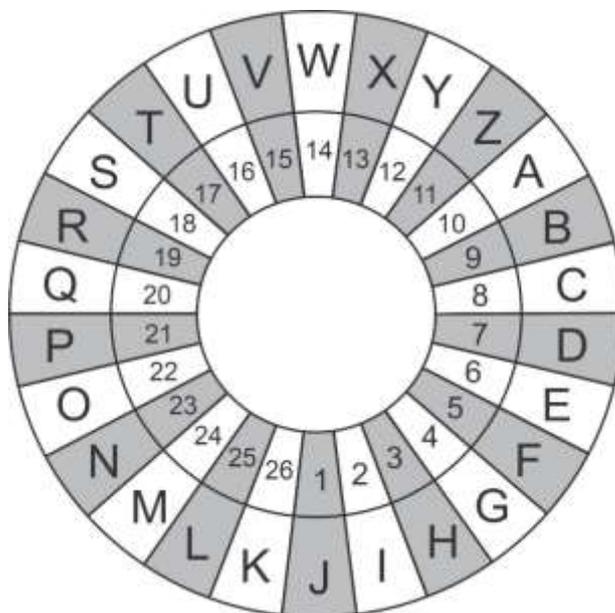
#### QUESTÃO 4

Um pai dividiu um terreno retangular em outros seis retângulos congruentes, que seriam distribuídos entre seus filhos como herança. Após a divisão, cada filho recebeu um terreno com área igual a  $750 \text{ m}^2$ , e perímetro igual a  $115 \text{ m}$ . Além disso, a frente do terreno voltada para a rua A é maior que a frente do terreno voltada para rua B. Quais eram dimensões do terreno antes da divisão?



#### QUESTÃO 5

A criptografia tem por objetivo oferecer segurança e privacidade em uma comunicação. Um dos primeiros sistemas conhecidos foi elaborado por Júlio César, no Império Romano. Uma forma de criptografar palavras como era feito por ele consiste em usar um disco que associa cada letra do alfabeto a um número. Para isso, escolhe-se um número de 1 a 26, chamado chave do código, depois gira-se o disco interno do aparato exibido na imagem até que essa chave esteja alinhada com a letra A. Depois disso, cada letra da palavra a ser codificada é substituída pelo número correspondente, separado por um traço. Na figura, a chave é 10 e a palavra OIM pode ser codificada como 22-2-24.



- Use o disco para escrever a palavra codificada por 24-6-7-10-25-3-10.
- Quantas chaves diferentes podem ser obtidas com o uso do disco apresentado na imagem?  
**Explique.**
- Use a chave 23 para codificar a palavra OLIMPIADA.
- Joãozinho codificou uma palavra de 6 letras com a chave 23, mas se esqueceu de colocar os traços e foi escrito 2269102419. Coloque os traços esquecidos por Joãozinho na posição correta e escreva a palavra que ele codificou.
- Em uma determinada chave, as letras X, Y e Z são representadas por números cuja soma é 39. Qual é essa chave?

*Boa prova!*